Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

Дніпропетровська область

2019 – 2020 н. р.

Варіант А

6 клас

1. **З одного села в протилежних напрямках вирушили 2 пішоходи. Один із них ішов зі швидкістю $2,7$ км/год, а другий — $1,8$ км/год. Якою буде відстань між ними через $1,2$ години після початку руху?**
   Пішоходи віддаляються одне від одного зі швидкістю $2,7 + 1,8 = 4,5$ км/год. Тому через $1,2$ години відстань між ними буде $5,4$ км.

2. **Число A складає 40% від числа B. Скільки відсотків складає число B від числа A?**
   За умовою $A = 0,4 * B$. Тому $B = 2,5A$, а отже складає 250% від числа A.

3. **Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 40 см, а периметр прямокутника $ABEH$ — 30 см. На скільки сантиметрів сторона BC більше сторони AH?**

   $$10 = P_{ABCD} - P_{ABEH} = 2 \cdot AB + 2 \cdot BC - 2 \cdot AB - 2 \cdot EH = 2(BC - EH).$$

   Звідси отримуємо, що сторона BC довша за EH на 5 см.

4. **Наведіть приклад трьох натуральних чисел a, b, c таких, що**

   $$\textbf{НСД}(a, b, c) = 1,$$

   НСД$(a, b) = 2$ і НСД$(b, c) = 3$.
   $a = 2$, $b = 6$, $c = 3$.

5. **Чи можна між деякими з 6 міст побудувати дороги так, щоб з кожного міста виходило рівно 3 дороги? Будь-які два міста не можуть бути сполучені більше ніж однією дорогою.**
   Можна. Наприклад з'єднати дорогами кожне з міст з номерами $1, 2$ і 3 з кожним із міст з номерами $4, 5$ і 6.

7 клас

1. **Перший автомат за 2 хвилини виготовляє 3 однакові деталі, а другий за цей самий час виготовляє на 100% більше таких деталей. Скільки усього деталей виготовляють обидва автомати разом за 10 хвилин?**
   За умовою, перший автомат виготовить 15 деталей за 10 хвилин, а другий — 30. Тому разом вони виготовлять 45 деталей.

2. **Розв'яжіть рівняння**
   $$(x-2)^{32}(x-5)^6 + |15-3x| = 0.$$
   Обидва доданки в лівій частині невід'ємні. Тому $(x-2)^{32}(x-5)^6 = 0$ і $|15-3x| = 0$. Перше рівняння має розв'язками числа 2 і 5, друге — число 5. Тому початкове рівняння має єдиний розв'язок $x = 5$.

3. **Нехай задано трикутник ABC і довільну точку X площини, що не співпадає з вершинами трикутника. Яке найбільше значення може набувати сума**
   $$\angle AXB + \angle BXC + \angle CXA?$$
   Якщо X належить трикутнику ABC, то сума вказаних кутів дорівнює $360°$. Покажемо, що сума не може бути більшою.

   Нехай X не належить трикутнику ABC. Можемо вважати, що точки A і X лежать по різні сторони від прямої BC.

   Якщо X лежить всередині кута BAC, то $\angle AXB + \angle BXC + \angle CXA = 2\angle CXB < 360°$.

   Якщо точки X і C лежать по різні сторони від прямої AB, то $\angle AXB + \angle BXC + \angle CXA = 2\angle AXC < 360°$.

   Якщо точки X і B лежать по різні сторони від прямої AC, то $\angle AXB + \angle BXC + \angle CXA = 2\angle AXB < 360°$.

4. **Чи існує трійка натуральних чисел a, b, c таких, що**
   $$\text{НСД}(a,b,c) = 1,$$
   НСД$(a,b) = 2$, НСД$(b,c) = 3$, і $a+b+c > 2019$?
   Так, існує. Нехай $p > 1005$ — просте число. Тоді трійка чисел $a = 2\cdot p$, $b = 6$ і $c = 3$ задовольняє умовам, і $a+b+c > 2\cdot 1005 + 9 = 2019$.

5. **Доведіть, що для кожного натурального числа k, $1 \le k \le 3$, між деякими з 6 міст можна побудувати дороги так, щоб з кожного міста виходило рівно k доріг. Будь-які два міста не можуть бути сполучені більше ніж однією дорогою.**
   Для $k = 1$ можна побудувати дороги $1-2$, $3-4$ і $5-6$.

   Для $k = 2$ можна побудувати дороги $1-2$, $1-6$, $2-3$, $3-4$, $4-5$ і $5-6$.

   Для $k = 3$ див. задачу 6.5.

8 клас

1. **Середній вік деяких 3 вчителів математики складає 25 років, а середніх вік 6 вчителів української мови — 34 роки. Скільки років має бути учителю географії, щоб середній вік цих трьох вчителів математики, шести вчителів української і вчителя географії був 30 років?**

   Зауваження. Під середнім значенням декількох чисел треба розуміти середнє арифметичне значення цих чисел.
   Нехай вчителю географії x років. Тоді сумарний вік усіх учителів з одного боку дорівнює $3 \cdot 25 + 6 \cdot 34 + x = 279 + x$. А з іншого боку $30 \cdot 10 = 300$. Тому $x = 21$.

2. **Побудувати графік функції**
$$y = \frac{x^2 - 4x + 4}{|x-2|}.$$

   Графіком функції буде графік $y = |x-2|$ з виколотою точкою $(2, 0)$.

3. **В паралелограмі $ABCD$ бісектриси кутів A і B перетинаються в точці O. Відомо, що $OA = 3$ см, $AB = 6$ см. Точка F є серединою сторони AB. Доведіть, що $\triangle FAO$ — правильний.**
   Оскільки $\angle DAB + \angle ABC = 180°$, то $\angle AOB = 90°$. Отже трикутник AOB прямокутний і катет AO вдвічі менший за гіпотенузу AB. Тому $\angle ABO = 30°$, тому $\angle BAO = 60°$. Крім того, $AF = 3 = AO$, а отже трикутник AFO — правильний.

4. **Знайдіть усі трійки натуральних чисел a, b, c таких, що**
$$\textbf{НСД}(a, b, c) = 1,$$

   НСД$(a, b) = 2$, НСД$(b, c) = 3$, і величина $a + b + c$ набуває найменшого можливого значення.
   За умовою a ділиться на 2, тому $a \geq 2$. Крім того, b ділиться на 2 і 3, а c ділиться на 3. Оскільки числа 2 і 3 є взаємно простими, то число b ділиться на 6. Тому $a + b + c \geq 2 + 6 + 3 = 11$. Крім того, рівність може виконуватись тоді і тільки тоді, коли $a = 2$, $b = 6$ і $c = 3$. Легко бачити, що ця трійка задовольняє умовам задачі. Отже мінімальне значення величини $a + b + c$ дорівнює 11 і $(2, 6, 3)$ — єдина трійка натуральних чисел, що задовольняє умовам і на якій величина $a + b + c$ набуває найменшого значення.

5. **Доведіть, що для кожного натурального числа k, $1 \leq k \leq 4$, між деякими з 6 міст можна побудувати дороги так, щоб з кожного міста виходило рівно k доріг. Будь-які два міста не можуть бути сполучені більше ніж одною дорогою.**
   Випадки $1 \leq k \leq 3$ розглянуті в задачі 7.5.

   Для $k = 4$ побудуємо усі можливі дороги, окрім тих, які зазначено для випадку $k = 1$.

9 клас

1. **Знаменник звичайного нескоротного дробу на 5 більший за чисельник. Якщо знаменник дробу збільшити на 6, а чисельник збільшити на 4, то дріб збільшиться на $\frac{1}{4}$. Знайти початковий дріб.**
   Нехай чисельник заданого дробу n, тоді заданий дріб — це $\frac{n}{n+5}$. За умовою $\frac{n+4}{n+11} = \frac{n}{n+5} + \frac{1}{4}$. Розв'язуючи рівняння отримуємо два корені: $n = -25$ і $n = 1$. Умову про нескоротність дробу задовольняє тільки $n = 1$, отже заданий дріб — це $\frac{1}{6}$.

2. **Побудувати графік функції**
$$y = \frac{|x-5|}{x^2 - 12x + 35}.$$
   При $x > 5$ графік функції співпадає з графіком гіперболи $y = \frac{1}{x-7}$, при $x < 5$ графік функції співпадає з графіком гіперболи $y = -\frac{1}{x-7}$.

3. **У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику кола ділить гіпотенузу у відношенні $2:3$. Центр вписаного кола віддалений від вершини прямого кута на відстань $\sqrt{8}$ см. Визначити периметр трикутника.**
   Нехай O — центр вписаного в трикутник ABC кола, K, L, M — точки його дотику до сторін трикутника, причому K лежить на гіпотенузі AB. Тоді $8 = CO^2 = CL^2 + CM^2$ і $MC = CL = r$, де r — це радіус вписаного у трикутник кола. Звідси $r = 2$. Нехай $AK = 3x$, тоді $BK = 2x$, $MA = AK$, $BK = KL$, а отже сторони трикутника мають довжини $5x$, $2x + 2$ і $3x + 2$. Записуючи теорему Піфагора, приходимо до рівняння відносно x, розв'язком якого є число $x = 2$. Тому периметр трикутника 24 см.

4. **Знайдіть усі п'ятірки натуральних чисел a, b, c, d, e таких, що**
$$\text{НСД}(a, b, c, d, e) = 1,$$
   НСД$(a, b) = 2$, НСД$(b, c) = 3$, НСД$(c, d) = 5$, НСД$(d, e) = 7$ і величина $abcde$ набуває найменшого можливого значення.
   Аналогічно розв'язанню задачі 8.4, можна показати, що єдиною п'ятіркою чисел, що задовольняють умові і для якої величина $abcde$ набуває найменшого значення є набір $a = 2$, $b = 6$, $c = 15$, $d = 35$, $e = 7$.

5. **Знайдіть усі натуральні числа k, такі, що між деякими з 6 міст можна побудувати дороги так, щоб з кожного міста виходило рівно k доріг. Будь-які два міста не можуть бути сполучені більше ніж однією дорогою.**
   У задачі 8.5 показано як будувати дороги для $1 \le k \le 4$. При $k = 5$ достатньо з'єднати дорогами кожну пару міст.

10 клас

1. **При яких значеннях параметра a система рівнянь**

$$\begin{cases} |x| + y - 4 = 0 \\ (y-a)^2 + x^2 = 9. \end{cases}$$

має єдиний розв'язок?
Зрозуміло, що якщо (x, y) є розв'язком системи, то і $(-x, y)$ є її розв'язком. Отже єдиний розв'язок може бути лише у випадку, коли $x = 0$. Тоді $y = 4$, а отже $a = 7$ або $a = 1$. У випадку $a = 7$ система має єдиний розв'язок $(0, 4)$, а у випадку $a = 1$ розв'язками цієї системи будуть ще і точки $(\pm 3, 1)$.

2. **Для кожного натурального $n > 1$ знайдіть усі геометричні прогресії з першим членом 2 і сумою перших n членів, що також дорівнює 2.**
Нехай знаменних геометричної прогресії дорівнює q. Зрозуміло, що $q \neq 1$. Тоді сума перших n членів цієї прогресії дорівнює

$$2\frac{1-q^n}{1-q} = 2.$$

Звідси $1 - q^n = 1 - q$, і, враховуючи, що $q \neq 0$, отримуємо $q = -1$ при непарних n. При парних n це рівняння не має інших окрім 0 і 1 коренів, які були уже розглянуті раніше.

3. **Відомо, що чотири точки A, B, C, D не лежать в одній площині, $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$. Нехай C_1 ділить відрізок AB у відношенні $3 : 4$, а B_1 ділить відрізок AC у відношенні $5 : 4$ починаючи з вершини A. Нехай пряма l — це лінія перетину площин CC_1D і BB_1D, а M — точка перетину l з площиною ABC. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB.**
Зі співвідношення між довжинами сторін трикутника ABC слідує, що він прямокутний. Крім того, зі співвідношень, у яких точки B_1 і C_1 ділять сторони трикутника слідує, що BB_1 і CC_1 — це бісектриси. Оскільки площини CC_1D і BB_1D містять точку D і відмінну від неї точку перетину бісектрис BB_1 і CC_1, яка лежить у площині ABC, то точка M є центром вписаного у трикутник ABC кола. Відстань від M до прямої AB дорівнює радіусу r вписаного в трикутник кола, а оскільки цей трикутник прямокутний, то $r = \frac{3+4-5}{2} = 1$.

4. **Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — перші n простих чисел. Знайдіть найменше можливе значення добутку $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}$, де натуральні числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ такі, що**

$$\textbf{НСД}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 1$$

і НСД$(x_i, x_{i+1}) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
З умови слідує, що x_1 ділиться на p_1, а отже $x_1 \geq p_1$. Крім того, x_2 ділиться і на p_1, і на p_2. Оскільки p_1 і p_2 є взаємно простими, то x_2 ділиться на $p_1 \cdot p_2$, а отже $x_2 \geq p_1 \cdot p_2$. Продовжуючи аналогічні міркування, отримаємо, що

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} \geq p_1 \cdot (p_1 \cdot p_2) \cdot (p_2 \cdot p_3) \cdot \ldots \cdot (p_{n-1} \cdot p_n) \cdot p_n = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \ldots \cdot p_n^2.$$

Якщо $x_1 = p_1$, $x_2 = p_1 p_2$, $x_3 = p_2 p_3$, і так далі, $x_n = p_{n-1} p_n$, $x_{n+1} = p_n$, всі умови задачі виконуються, і $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \ldots \cdot p_n^2$.

5. **У деякій країні $2n$ міст. Знайдіть усі такі натуральні k, що між деякими містами країни можна побудувати дороги так, щоб з кожного міста виходило рівно k доріг. Будь-які два міста не можуть бути сполучені більше ніж однією дорогою.**
Покажемо, що це можна зробити для всіх $k = 1, \ldots, 2n - 1$. Спочатку розглянемо випадок $k \leq n$. Пронумеруємо міста числами $1, \ldots, 2n$. Для кожного $m \in \{1, \ldots, n\}$ з'єднаємо місто m з містами $n + f(m), \ldots, n + f(m + k - 1)$, де

$$f(s) = \begin{cases} s, & s \leq n \\ s - n, & s > n. \end{cases}$$

Легко бачити, що кожне місто буде з'єднано дорогою рівно з k містами.

У випадку, коли $n < k < 2n - 1$, побудуємо дороги між кожною парою міст, окрім тих, які були б з'єднані дорогами за описаною вище процедурою для $2n - k - 1$ доріг.

У випадку $k = 2n - 1$ достатньо з'єднати усі пари міст дорогами.

11 клас

1. **Знайдіть всі значення параметра a, при яких корінь рівняння**
$$\lg(\sin 5\pi x) = \sqrt{16 + a - x}$$
належить проміжку $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.
Легко бачити, що ліва частина рівняння недодатна, а права — невід'ємна. Отже рівність може бути тоді і тільки тоді, коли $\lg(\sin 5\pi x) = 0 = \sqrt{16 + a - x}$. На проміжку $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ єдиним коренем рівняння $\sin 5\pi x = 1$ є число $\frac{13}{10}$, тому єдиним значенням a, що задовольняє умові є число $a = -\frac{147}{10}$.

2. **Нехай $x > 0$. Знайти найбільше значення виразу $\frac{\sqrt{16+2x^3}}{8+x^2}$.**
$$\sqrt{16 + 2x^3} = \sqrt{(4 + 2x)(4 - 2x + x^2)} \le \frac{1}{2}(4 + 2x + 4 - 2x + x^2) = \frac{8 + x^2}{2}.$$
Тому $\frac{\sqrt{16+2x^3}}{8+x^2} \le \frac{1}{2}$. Застосована нерівність Коші перетворюється на рівність у випадку, коли $4 + 2x = 4 - 2x + x^2$. Його коренем є додатне число $x = 4$, отже при $x = 4$, $\frac{\sqrt{16+2x^3}}{8+x^2} = \frac{1}{2}$.

3. **У трикутній піраміді $DABC$ $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$, усі грані нахилені до площини основи під кутом $30°$. Нехай C_1 ділить відрізок AB у відношенні $3 : 4$, а B_1 ділить відрізок AC у відношенні $5 : 4$ починаючи з вершини A. Нехай пряма l — це лінія перетину площин CC_1D і BB_1D, а M — точка перетину l з площиною ABC. Знайти відстань від точки M до площини DBC.**
Аналогічно розв'язанню задачі 10.3 можна показати, що M — це центр вписаного в прямокутний трикутник ABC кола. Оскільки бічні грані нахилені під однаковим кутом до площини основи, то пряма DM перпендикулярна площині ABC. Нехай точка K є точкою дотику вписаного кола до сторони BC. Тоді $MK \perp BC$, а отже за теоремою про три перпендикуляри $DK \perp BC$. Тоді кут DKM є лінійним кутом двогранного кута при ребрі BC. Нехай ME є висотою трикутника DKM. Пряма BC перпендикулярна площині KDM, звідки слідує, що $ME \perp BC$. За побудовою $ME \perp DK$ тоді за ознакою перпендикулярності прямої і площини отримуємо, що пряма ME перпендикулярна площині DCB. Отже довжина відрізка ME є шуканою відстанню і $ME = \frac{KM}{2} = \frac{3+4-5}{4} = \frac{1}{2}$.

4. **Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — перші n простих чисел. Знайдіть найменше можливе значення добутку $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}$, де натуральні числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ такі, що**
$$\textbf{НСД}(x_1, \ldots, x_{n+1}) > 1$$
і НСД$(x_i, x_{i+1}) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Нехай НСД$(x_1, \ldots, x_{n+1}) = d > 1$. Якщо $n > 1$, то обидва числа p_1 і p_2 діляться на d, що можливо тільки при $d = 1$. Отже у випадку $n > 1$ чисел, що задовольняють умові задачі, не існує.

Якщо $n = 1$, то $x_1, x_2 \ge p_1 = 2$, а отже $x_1 \cdot x_2 \ge 4$. Якщо $x_1 = x_2 = 2$, то умови задачі виконуються і $x_1 \cdot x_2 = 4$.

5. **У деякій країні n міст. Знайдіть усі такі натуральні k, що між деякими містами країни можна побудувати дороги так, щоб з кожного міста виходило рівно k доріг. Будь-які два міста не можуть бути сполучені більше ніж однією дорогою.**
Випадок парного n розв'язано у задачі 10.5. Нехай тепер n непарне. Якщо k задовольняє умові задачі, то k парне, оскільки тоді побудовано $\frac{nk}{2}$ доріг, і це число має бути цілим. Покажемо, що для кожного парного $k = 2s$ можна побудувати дороги згідно з умовою задачі.

Пронумеруємо міста числами від 1 до n. Розташуємо n точок по колу і міста з номерами i та j $(i \ne j)$ з'єднаємо дорогами тоді і тільки тоді, коли між точками i і j на колі знаходиться не більше ніж $s - 1$ точок. Тоді кожне місто буде з'єднано дорогою рівно з $2s$ іншими містами.