Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

Дніпропетровська область
2017-2018 н. р.
6 клас

1. Обчисліть значення виразу $(6,1+0,9)\cdot(6,01+0,99)\cdot(6,001+0,999)$.

   $(6,1+0,9)\cdot(6,01+0,99)\cdot(6,001+0,999)=7\cdot 7\cdot 7=343$.

2. Син у 3 рази молодший за батька. Скільки років батькові, якщо він старший за сина на 24 років?

   Нехай сину x років. Тоді батьку $3x$ років. За умовою $3x=x+24$. Звідси $x=12$, а отже батьку 36 років.

3. Три їжачки ділять три шматочки сиру масами 6 г, 8 г та 12 г. Лис вирішив їм допомогти. Він може один чи декілька разів від будь-яких двох шматочків одночасно відрізати та з'їсти по 1 г. Чи може лис залишити їжачкам рівні шматочки?

   Так, може. Лис може взяти перший і третій шматок, і чотири рази відрізати від них по одному граму (отримаємо шматки з масами 2 г, 8 г, 8 г). Після цього шість разів відрізати від другого і третього шматків по одному граму. В результаті отримаємо три шматки по 2 г.

4. Петрик склав куб з ребром 1002 см з маленьких кубиків з ребром 1 см. Марійка вирішила прибрати усі маленькі кубики, що знаходяться на поверхні куба. Скільки кубиків вона прибрала?

   Перше розв'язання. *Серед усіх маленьких кубиків є 8, що мають рівно по 3 грані на поверхні великого куба; $12\cdot 1000=12000$ маленьких кубиків, що мають рівно по 2 грані на поверхні великого куба; $6\cdot 1000^2=6000000$ маленьких кубиків, що мають рівно одну грань на поверхні великого куба. Тому всього Марійка прибере 6012008 маленьких кубиків.*

   Друге розв'язання. *Марійка залишить на місці кубики, що складають внутрішній куб зі стороною 1000 см. Тому вона прибере $1002^3-1000^3=6012008$ кубиків.*

5. Знайдіть усі пари простих чисел, таких, що їх сума та різниця теж прості числа.

   Нехай $p,q>1$ — шукані прості числа. Оскільки $p+q>2$ є простим числом, то число $p+q$ є непарним. Тому одне з чисел p та q — парне, інше — непарне. Тому серед чисел p та q є число 2, можемо вважати, що $q=2$. Пара $p=3,q=2$ не задовольняє умові, а тому p не ділиться на 3. Якщо p дає залишок 1 при діленні на 3, то число $p+2$ ділиться на 3 і $p+2>3$; отже число $p+2$ не може бути простим. Таким чином число p дає залишок 2 при діленні на 3. Тоді число $p-2$ ділиться на 3. А оскільки $p-2$ — просте число, то $p-2=3$, тобто $p=5$. Легко перевірити, що пара $p=5,q=2$ задовольняє умовам задачі.

7 клас

1. Обчисліть значення виразу
$$\frac{49^4 \cdot 343^{10}}{7^{37}}.$$
$$\frac{49^4 \cdot 343^{10}}{7^{37}} = \frac{(7^2)^4 \cdot (7^3)^{10}}{7^{37}} = \frac{7^8 \cdot 7^{30}}{7^{37}} = \frac{7^{38}}{7^{37}} = 7.$$

2. У двох вагонах поїзду їхало порівну пасажирів. Коли з першого вагону вийшло 24 пасажирів, а з другого 17, у першому стало пасажирів у два рази менше ніж у другому. Скільки пасажирів було у кожному вагоні спочатку?

   Нехай у вагонах було по x пасажирів в кожному. Тоді $2 \cdot (x - 24) = x - 17$, звідки $x = 31$.

3. Скількома способами числа від 1 до 1814 можна поставити в ряд, щоб сусідні числа відрізнялися на 1?

   Одиниця може стояти тільки на першому або на останньому місці, оскільки в протилежному випадку хоча б з однієї сторони біля неї буде стояти число, більше за 2 (а отже буде відрізнятися більше ніж на 1).

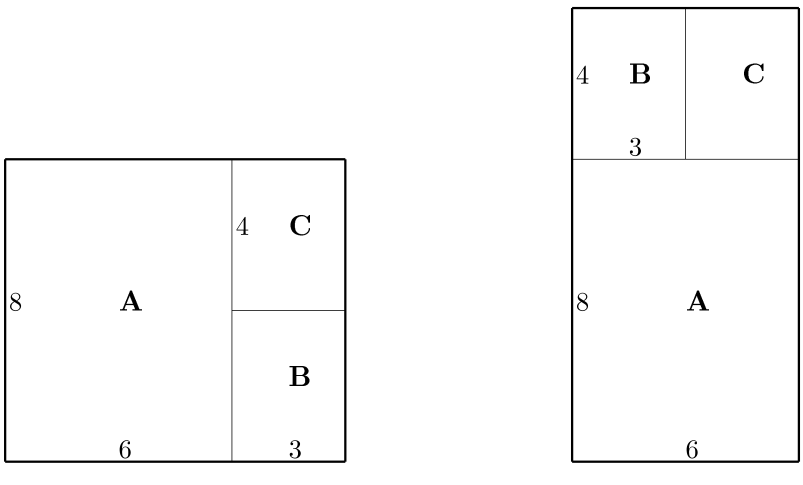
   Розглянемо випадок, коли одиниця стоїть на першому місці. Тоді на другому місці має стояти число 2. Біля числа 2 можуть стояти тільки числа 1 і 3, а отже на третьому місці має стояти число 3. І так далі, ми отримаємо, що в цьому випадку числа можуть бути розставлені єдиним способом: $1, 2, 3, \ldots, 1814$.

   Аналогічно у випадку, коли одиниця стоїть на останньому місці, ми отримаємо єдине можливе розташування $1814, 1813, \ldots, 1$.

   Таким чином існує рівно 2 способи розташувати числа згідно з умовою задачі.

4. Чи можна прямокутник зі сторонами 9 см і 8 см розрізати на трикутники, з яких можна скласти прямокутник зі сторонами 6 см і 12 см?

   Можна. На малюнку показано, як прямокутник зі сторонами 9 см і 8 см розрізати на маленькі прямокутники A, B і C, з яких можна скласти прямокутник зі сторонами 6 см і 12 см. Для розрізання на трикутники достатньо розрізати кожен з маленьких прямокутників вздовж діагоналі.



5. Магічним квадратом називають квадратну таблицю, заповнену числами, для якої сума чисел в усіх рядках, стовпчиках та двох діагоналях рівні. Чи можна скласти магічний квадрат 3×3 з перших 9 непарних простих чисел?

   Перші дев'ять непарних простих чисел — це $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$. Їх сума дорівнює 127. Припустимо, що існує магічний квадрат, що складений з перших 9 непарних простих чисел. Тоді сума усіх чисел в квадраті в три рази більша за суму чисел в першому стовпчику, а отже ділиться на 3. Але 127 не ділиться на 3, а отже неможливо скласти магічних квадрат з перших дев'ятьох непарних простих чисел.

8 клас

1. Перший металевий злиток містить 30% міді, другий — 70% міді. Скільки кілограмів кожного злитку треба взяти, щоб отримати 140 кг сплаву, який містить 40% міді?

   Нехай потрібно взяти x кг першого злитка. Тоді треба взяти $140-x$ кг другого злитка. Отримаємо рівняння $0,3x + 0,7 \cdot (140 - x) = 0,4 \cdot 140$, звідки $x = 105$. Отже треба взяти 105 кг першого злитка і 35 кг другого злитка.

2. Нехай $f(x)$ та $g(x)$ — лінійні функції. Відомо, що $(f(-1))^2 + (g(-1))^2 = 0$ та $\frac{f(3)}{g(3)} = 2018$. Знайдіть $\frac{f(2017)}{g(2017)}$.

   Нехай $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$. З умови задачі слідує, що $f(-1) = g(-1) = 0$, отже $b = a$, $d = c$. Тому

   $$2018 = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{3a + a}{3c + c} = \frac{a}{c} = \frac{2017a + a}{2017c + c} = \frac{f(2017)}{g(2017)}.$$

3. Скількома способами числа від 1 до 1861 можна поставити в ряд, щоб сусідні числа відрізнялися на 1?

   Розв'язання аналогічне розв'язанню задачі **7.3**.

4. Знайдіть усі натуральні n, більші за 1, такі, що $n^3 - 4$ ділиться на $n - 1$.

   Оскільки $n^3 - 4 = n^3 - 1 - 3 = (n-1)(n^2 + n + 1) - 3$, то 3 ділиться на $n - 1$. Це означає, що $n - 1 = 1$ або $n - 1 = 3$. Отже $n = 2$ або $n = 4$.

5. Чи існує трикутник, який можна розрізати на три рівних нерівнобедрених трикутники зі спільною вершиною всередині заданого трикутника?

   Припустимо, що трикутник ABC і точка O всередині нього такі, що трикутники AOB, AOC і OBC нерівнобедрені і рівні. Тоді OA, OB і OC попарно нерівні відрізки. Тоді з рівності трикутників AOB і AOC випливає, що $AB = OC$ і $OB = AC$. Аналогічно $BC = AO$. Але тоді трикутники ABC і AOC рівні за третьою ознакою рівності трикутників, що неможливо. Дійсно, легко довести, що якщо точка O знаходиться всередині трикутника ABC, то кут AOC більший за кут ABC (нехай промінь CO перетинає сторону AB у точці K. $\angle AOC$ — це зовнішній кут трикутника AKO. Тоді $\angle AOC > \angle AKO$; аналогічно $\angle AKO > \angle ABC$).

9 клас

1. Два робітники, працюючи разом, виконали деяке завдання за 12 годин. За скільки годин може виконати це завдання кожен робітник, працюючи самостійно, якщо один з них може це зробити на 10 годин швидше за іншого?

   Нехай перший робітник може виконати роботи за x годин. Тоді другий — за $x-10$ годин. За одну годину перший робітник виконує $\frac{1}{x}$ частину роботи, другий — $\frac{1}{x-10}$ частину роботи. Отримаємо рівняння $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-10}=\frac{1}{12}$. Його коренями будуть числа 4 і 30. Оскільки $x-10$ має бути додатнім числом, то перший робітник може виконати роботу за 30 годин, а другий — за 20 годину.

2. Дано прямокутний трикутник з катетами 5 см та 12 см. Знайдіть відстань від вершини меншого гострого кута до точки перетину бісектрис цього трикутника.

   Нехай задано трикутник ABC, $AC=12$, $BC=5$. Тоді менший гострий кут буде при вершині A трикутника. Нехай O — центр вписаного в трикутник ABC кола, D — точка дотику вписаного кола до сторони AC. Тоді $AO=\sqrt{OD^2+AD^2}$. При цьому $OD=CD=\frac{1}{2}(AC+CB-AB)=2$, а тому $AO=2\sqrt{26}$.

3. Яке найбільше значення набуває функція

$$y=\min\left\{\frac{1}{x^2};2-\frac{1}{x^2}\right\}?$$

   Оскільки функція y парна, то достатньо шукати найбільше значення при $x>0$. Розв'язуючи нерівність $\frac{1}{x^2}\leq 2-\frac{1}{x^2}$ отримаємо, що

$$y=\begin{cases}2-\frac{1}{x^2}, & x\in(0,1]\\ \frac{1}{x^2}, & x>1\end{cases}$$

   Тому функція y зростає на проміжку $(0,1]$ і спадає на проміжку $(1,\infty)$. Це означає, що найбільше значення функції y дорівнює $y(1)=1$.

4. Знайдіть усі натуральні n, такі, що $n^2+8n+34$ ділиться на $n+4$.

   Оскільки $n^2+8n+34=(n+4)^2+18$, то 18 ділиться на $n+4$. Враховуючи, що n — натуральне число, отримаємо, що $n+4=6$, або $n+4=9$, або $n+4=18$. Звідси $n=2$, $n=5$ або $n=14$.

5. Дано клітчату таблицю 1871×1871, кожну клітинку якої зафарбовано у чорний або білий колір. Дозволяється одночасно перефарбувати усі клітинки деякого стовпчика чи рядку у той колір, якого у даному стовпчику чи рядку більше до перефарбування. Чи завжди можна досягти того, щоб усі клітинки були зафарбовані одним кольором?

   Покажемо, що це завжди можна зробити. Нехай в початковий момент є n рядків, в яких більше білих клітинок і $1871-n$ рядків, в яких більше чорних клітинок. Без зменшення загальності можемо вважати, що $n\geq 936$. В кожному з цих n рядків по черзі перефарбуємо клітинки. Тоді в усіх цих n рядках клітинки стануть білими. В кожному стовпчику опиниться не менше 936 клітин білого кольору, а отже при перефарбуванні клітинок довільного стовпчика, клітинки будуть фарбуватись в білий колір. Таким чином, перефарбовуючи по черзі клітинки кожного зі стовпчиків ми отримаємо таблицю з усіма білими клітинками.

10 клас

1. У 2015 році в місті X мешкало 60000 жителів, а у 2017 році – 48600. На скільки відсотків щорічно зменшувалося населення цього міста, якщо кожного року відсоток зменшення населення був однаковий?

   Нехай кожного року населення міста зменшувалось на $x\%$. Тоді у 2017 році населення міста X склало $60000 \cdot (1-0,01x)^2$ людей. Звідси маємо, що $(1-0,01x)^2 = 0,81$, а отже $x = 10$.

2. Нехай $f(x)$ та $g(x)$ — квадратичні функції. Відомо, що $|f(1)| + |g(1)| + |f(2)| + |g(2)| = 0$ та $\frac{f(3)}{g(3)} = 2018$. Знайдіть $\frac{f(2017)}{g(2017)}$.

   Нехай $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = kx^2 + lx + m$, де $a, k \neq 0$. З умови слідує, що $f(1) = g(1) = f(2) = g(2) = 0$. З цього слідує, що $b = -3a$, $c = 2a$, $l = -3k$ і $m = 2k$. Тому $f(x) = a(x^2 - 3x + 2)$, $g(x) = k(x^2 - 3x + 2)$, а отже

$$\frac{f(2017)}{g(2017)} = \frac{a}{k} = \frac{f(3)}{g(3)} = 2018.$$

3. У трикутнику зі сторонами 29 см, 25 см та 6 см знайдіть відстань від вершини більшого кута до точки перетину бісектрис.

   Нехай задано трикутник ABC, $AB = 29$, $BC = 25$, $AC = 6$. Тоді найбільшим кутом трикутника буде кут C. Нехай O — центр вписаного в трикутник кола, L, M, N — точки дотику вписаного кола до сторін AB, BC і AC відповідно. Тоді шуканою відстанню буде довжина відрізка OC. Користуючись властивістю дотичних, проведених з однієї точки, покладемо $AL = AN = x$, $BL = BM = y$, $CM = CN = z$. Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 29 \\ y + z = 25 \\ z + x = 6. \end{cases}$$

   Розв'язуючи цю систему, отримаємо $x = 5$, $y = 24$, $z = 1$. Знайдемо радіус r вписаного кола трикутника. $p = x + y + z = 30$, $S = \sqrt{30 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 24} = 60$. Тоді $r = \frac{S}{p} = 2$, а отже $OC = \sqrt{5}$ см.

4. Знайдіть усі натуральні m і n, такі, що $m! + 3 = n^3$.

   При $m \geq 6$ число $m! + 3$ ділиться на 3, але не ділиться на 9, а отже не може бути кубом натурального числа. Тому, перебираючи значення $m = 1, 2, \ldots, 5$ отримаємо, що єдиним розв'язком задачі буде пара $m = 4$, $n = 3$.

5. На дошці 1794×1794 розмістили 1794 тур, які не б'ють одна одну. Доведіть, що правий верхній та лівий нижній квадрати дошки 897×897 містять однакову кількість тур (тури б'ють по горизонтальним та вертикальним лініям).

   З умови задачі слідує, що в кожному рядку та кожному стовпчику дошки стоїть по одній турі. Нехай в лівому нижньому, верхньому лівому, верхньому правому квадраті 897×897 міститься n, m та k тур відповідно. Тоді $n + m = m + k = 897$. Звідси $n = k$, що і треба було довести.

11 клас

1. По двох колах рівних діаметрів рівномірно обертаються дві точки. Одна з них здійснює повний оберт на $3,5$ с швидше ніж друга, і тому встигає зробити за 1 хв на 7 обертів більше. Скільки обертів за хвилину виконує кожна з точок?

   Нехай перша точка робить x обертів за хвилину. Тоді один оберт триває $\frac{60}{x}$ секунд. Один оберт другої точки триває $\frac{60}{x}+3,5$ секунд, а отже за хвилину вона робить

   $$\frac{60}{\frac{60}{x}+3,5}$$

   обертів. За умовою

   $$x-7=\frac{60}{\frac{60}{x}+3,5}.$$

   Розв'язуючи рівняння отримаємо єдиний додатній розв'язок $x=15$. Отже перша точка робить 15 обертів за хвилину, друга — 8.

2. Доведіть, що значення виразу $1^{2017}+2^{2017}+\ldots+2016^{2017}+2017^{2017}$ не ділиться на 2018.

   Відмітимо, що для всіх $k=1,2,\ldots,1008$, $k^{2017}+(2018-k)^{2017}$ ділиться на 2018. Залишилось помітити, що $\sum\limits_{k=1}^{2017}k^{2017}=1009^{2017}+\sum\limits_{k=1}^{1008}\left(k^{2017}+(2018-k)^{2017}\right)$ і той факт, що 1009^{2017} не ділиться на 2018, бо є непарним числом.

3. Знайдіть найбільше значення параметра a, для якого рівняння

   $$5\left(\sin^{2017}x+\cos^{2017}x\right)=\sqrt{a+8}+\sqrt{2a-1}+\sqrt{5a-4}$$

   має розв'язок.

   Позначимо $f(x)=\sin^{2017}x+\cos^{2017}x$. Тоді для всіх x маємо $|f(x)|\le\left|\sin^{2017}x\right|+\left|\cos^{2017}x\right|\le\sin^2x+\cos^2x=1$. Крім того, функція f неперервна, $f(0)=1$, $f(\pi)=-1$. Тому рівняння $f(x)=b$ має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $b\in[-1,1]$.

   Позначимо $g(a)=\frac{1}{5}\left(\sqrt{a+8}+\sqrt{2a-1}+\sqrt{5a-4}\right)$. Тоді g є невід'ємною зростаючою функцією. Крім того, $g(1)=1$. Тому для всіх $a>1$ $g(1)>1$, і отже рівняння $f(x)=g(a)$ не має розв'язків; при всіх a з області визначення g, для яких $a\le1$, маємо $0\le g(a)\le1$, а отже рівняння $f(x)=g(a)$ має розв'язок.

   Отже шукане найбільше значення є $a=1$.

4. Перпендикуляри, проведені з точки M простору до сторін в 29 см, 25 см та 6 см деякого трикутника рівні. Відстань від точки M до площини цього трикутника дорівнює 10 см. Знайдіть відстань від точки M до вершини більшого кута заданого трикутника.

   Нехай заданий трикутник ABC і O — центр його вписаного кола. З умови слідує, що $MO\perp(ABC)$ і $MO=10$. З задачі **10.3** *слідує, що відстань від точки O до вершини найбільшого кута трикутника ABC дорівнює $\sqrt{5}$ см. Тоді за теоремою Піфагора шукана відстань дорівнює $\sqrt{105}$.*

5. На дошці 1913×1913, розмістили 1913 тур, які не б'ють одна одну, причому одну з тур поставили у центр дошки. Доведіть, що правий верхній та лівий нижній квадрати дошки 956×956 містять однакову кількість тур (тури б'ють по горизонтальним та вертикальним лініям).

   Розв'язання аналогічне розв'язанню задачі **10.5**.

Укладачі: Кірман В. К., Коваленко О. В.