Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

Дніпропетровська область

2018 – 2019 н. р.

Варіант А

6 клас

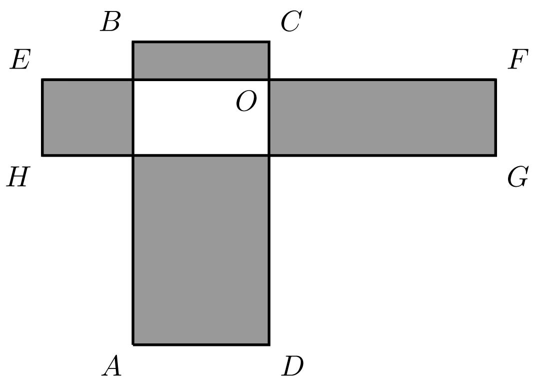
1. Поїзд їхав 5 годин зі швидкістю 62 км на годину і 3 години зі швидкістю 52 км на годину. Знайдіть середню швидкість поїзда протягом усього шляху.

   Всього поїзд рухався $5+3=8$ *год. За цей час він проїхав* $5\cdot 62+3\cdot 52=466$ *км. Отже, середня швидкість була* $466:8=58,25$ *км/год.*

2. Обчисліть значення виразу $15:\left(3\frac{12}{17}+2\frac{5}{17}\right)+\left(4,2-2\frac{3}{5}\right):4$.

   $15:\left(3\frac{12}{17}+2\frac{5}{17}\right)+\left(4,2-2\frac{3}{5}\right):4=15:6+1,6:4=2,5+0,4=2,9.$

3. Прямокутники $ABCD$ та $EFGH$ розміщено на площині так, як зображено на рисунку. Кут COF — прямий. Знайдіть площу заштрихованої частини, якщо $AB=22$ см, $BC=12$ см, $EH=8$ см та $EF=25$ см.



   Площа заштрихованої частини дорівнює $22\cdot 12+8\cdot 25-2\cdot 12\cdot 8=272см^2$.

4. Довжина кроку Михайлика дорівнює 60 см, а Петрика — 55 см. Яку найменшу відстань мають вони пройти разом, щоб кожний зробив по цілому числу кроків.

   Найменша відстань буде найменшим спільним кратним для довжин кроків. Оскільки $60=5\cdot 12$ *і* $55=5\cdot 11$*, то НСК*$(60,55)=5\cdot 11\cdot 12=660$ *см.*

5. В деякому місяці понеділків більше ніж вівторків, а неділь більше ніж субот. Яким днем тижня є 13-е число цього місяця? Чи може цей місяць бути груднем? Відповідь обґрунтуйте.

   З 1 *по* 28 *число кожен день тижня зустрічається* 4 *рази. Оскільки неділь більше ніж субот, то це означає, що місяць повинен починатись у неділю. Тоді* 13*-е число буде у п'ятницю. За умовою задачі понеділків більше ніж вівторків, тому місяць повинен закінчуватись у понеділок. Маємо, що місяць починається у неділю, потім триває 4 тижні, і закінчується у понеділок. Тоді загальна кількість днів у цьому місяці буде* $1+28+1=30$ *днів. Оскільки у грудні* 31 *день, то цей місяць не може бути груднем.*

7 клас

1. Микола записав на дошці чотирицифрове натуральне число. Наталка записала цифри, що входять в число Миколи, у зворотньому порядку і отримала чотирицифрове натуральне число. Наприклад, якщо Микола записав число 1234, то Наталка запише число 4321. Доведіть, що різниця чисел Миколи та Наталки завжди ділиться на 9.

$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = 1000a + 100b + 10c + d - 1000d - 100c - 10b - a = 999(a-d) + 90(b-c) \vdots 9.$$

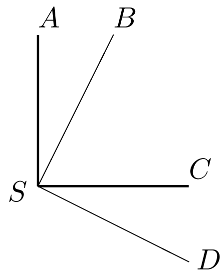
2. П'ять робітників, працюючи однаково, за 4 години зібрали 15 однакових пилососів. Скільки таких пилососів зберуть десять таких робітників за 2 години?

П'ять робітників за 4 години зібрали 15 однакових пилососів, тому 1 робітник за 1 годину виконає $\frac{3}{4}$ роботи по збиранню одного пилососа. Тоді 10 робітників за 2 години зберуть $\frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 10 = 15$ пилососів.

3. Натуральне число x може набувати значення від 1 до 5, а натуральне число y — від 2 до 7. Якого найбільшого значення може набувати вираз $x + y$, якщо відомо, що $xy - 6x - 3y + 18 = 0$?

За умовою $(x-3)(y-6) = 0$, тому $x = 3$, або $y = 6$. У випадку, коли $x = 3$ маємо, що сума $x + y$ не більша за 10. А якщо $y = 6$, то сума $x + y$ не більша за 11. Отже найбільше значення суми $x + y$ буде 11 при $y = 6$ та $x = 5$.

4. На рисунку $\angle ASC = \angle BSD$. Доведіть, що $\angle ASB = \angle CSD$.



$\angle ASB = \angle ASC - \angle BSC = \angle BSD - \angle BSC = \angle CSD$

5. Марійка та Петрик грають у таку гру. На прямокутній дошці розміром 2018×2019, яка поділена на клітинки, вони по черзі переставляють шахову туру. На початку гри тура стоїть у лівому нижньому куті дошки. Під час свого ходу кожен гравець може переставити туру на довільну кількість клітин вгору або праворуч. Виграє той гравець, який поставить туру у правий верхній кут дошки. Чи може Марійка виграти, якщо вона починає гру? Відповідь обґрунтуйте.

Так, Марійка може забезпечити собі перемогу. Виділимо на дошці квадрат розміром 2018×2018, що містить правий верхній кут дошки, і зафарбуємо його діагональ, що проходить через правий верхній кут дошки, у червоний колір.

Стратегія Марійки полягає у тому, щоб кожним своїм ходом ставити туру у червону клітинку: першим своїм ходом Марійка переставляє туру на 1 клітинку, щоб потрапити на першу клітинку пофарбованої діагоналі; якщо Петрик своїм ходом переставляє туру на n клітинок вправо, то Марійка переставляє туру на n клітинок вгору, а якщо Петрик переставляє туру на n клітинок вгору, то Марійка переставляє туру на n клітинок вправо.

При такій грі після кожного ходу Марійки, тура опиняється у червоній клітинці, а після ходу Петрика, тура опиняється у клітинці, що не є пофарбованою у червоний колір. Оскільки права верхня клітинка дошки червона, то переможцем буде Марійка.

8 клас

1. Марійка та Петрик збирали огірки на грядці поруч з домом бабусі. Петрику, щоб дійти до дому бабусі, необхідно зробити 100 кроків. Кожен крок Марійки на 10% коротше ніж Петрика, але Марійка робить кроки на 10% частіше. Хто з дітей раніше принесе огірки до бабусі, якщо вони знаходяться на однаковій відстані від будинку?

   Нехай довжина кроку Петрика x метрів. Тоді за 100 кроків Петрик пройде відстань $100x$ метрів. За той же час Марійка зробить 110 кроків довжини $0,9x$ метрів кожний, тобто пройде відстань $99x$ метрів. Тому Петрик прийде раніше.

2. Обчисліть значення виразу

$$\left(\frac{2018^{2019}+3}{2018^{2019}-3}+\frac{2018^{2019}-3}{2018^{2019}+3}\right):\frac{3\cdot 2018^{4038}+27}{9-2018^{4038}}.$$

   Позначимо $a=2018^{2019}$. Тоді весь вираз можна записати як

$$\left(\frac{a+3}{a-3}+\frac{a-3}{a+3}\right):\frac{3a^2+27}{9-a^2}=\left(\frac{(a+3)^2+(a-3)^2}{(a-3)\cdot(a+3)}\right)\cdot\frac{(3-a)\cdot(3+a)}{3\cdot(a^2+9)}=(-1)\cdot\frac{2a^2+18}{3\cdot(a^2+9)}=-\frac{2}{3}$$

3. В паралелограмі $ABCD$ відрізок XY, кінці якого належать сторонам BC і AD відповідно, ділиться діагоналлю AC навпіл. Доведіть, що відрізок XY проходить через точку перетину діагоналей паралелограма $ABCD$.

   Нехай XY перетинає діагональ AC в точці O. За умовою, $XO=YO$. $\angle XOC=\angle YOA$ як вертикальні, а $\angle CXO=\angle AYO$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній XY. Тоді за другою ознакою рівності трикутників маємо, що $\triangle XOC=\triangle YOA$, звідки випливає, що $AO=OC$. Оскільки в паралелограмі діагоналі точкою перетину діляться навпіл, то це і означає, що точка O — точка перетину діагоналей.

4. Знайдіть усі пари таких натуральних чисел x та y, що

$$(\text{НСД}(x,y))^2=xy.$$

   Нехай НСД$(x,y)=d$. Тоді $x=d\cdot x_1$, $y=d\cdot y_1$, де x_1 та y_1 є взаємно простими натуральними числами. З умови отримаємо $d^2=d^2\cdot x_1\cdot y_1$, звідки $x_1\cdot y_1=1$. Тому $x_1=y_1=1$, а отже, $x=y$. Зрозуміло, що якщо $x=y$, то (НСД$(x,y))^2=xy$.

5. Скількома способами квадратну таблицю розміром 2018×2018 можна заповнити числами 0 та 1 таким чином, щоб добуток чисел у кожному рядку дорівнював 0?

   За основним правилом комбінаторики, один рядок можна заповнити числами 0 та 1 2^{2018} способами. Добуток чисел у цьому рядку буде не дорівнювати 0 лише в тому випадку, коли всі цифри у рядку одиниці. Тоді кількість способів поставити 0 та 1 таким чином, щоб добуток у рядку дорівнював 0, буде $2^{2018}-1$. Оскільки всього рядків 2018, то за основним правилом комбінаторики, кількість способів заповнити рядки у таблиці буде дорівнювати $(2^{2018}-1)^{2018}$.

9 клас

1. Марійка та Петрик збирали огірки на грядці поруч з домом бабусі. Петрику, щоб дійти до дому бабусі, необхідно зробити 100 кроків. Кожен крок Марійки на 10% коротше ніж Петрика, але Марійка робить кроки на 10% частіше. Хто з дітей раніше принесе огірки до бабусі, якщо вони знаходяться на однаковій відстані від будинку?

   Нехай довжина кроку Петрика x метрів. Тоді за 100 кроків Петрик пройде відстань $100x$ метрів. За той же час Марійка зробить 110 кроків довжини $0,9x$ метрів кожний, тобто пройде відстань $99x$ метрів. Тому Петрик прийде раніше.

2. Розв'яжіть рівняння
$$x^2 - 3x + \frac{4}{x-2} = \frac{x+2}{x-2} - 3.$$

   Оскільки
$$\frac{x+2}{x-2} - 3 = \frac{x-2+4}{x-2} - 3 = 1 + \frac{4}{x-2} - 3 = \frac{4}{x-2} - 2,$$
   то наслідком початкового рівняння є рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$. Його коренями є числа $x = 2$ та $x = 1$. Безпосередньою перевіркою знаходимо, що $x = 1$ є коренем початкового рівняння, а $x = 2$ коренем не є.

3. На бічних сторонах трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) як на діаметрах побудовані кола ω_1 та ω_2. Нехай X та Y — довільні точки на колах ω_1 та ω_2 відповідно. Доведіть, що довжина відрізка XY не перевищує половини периметра трапеції $ABCD$.

   Нехай O_1 та O_2 — це центри кіл ω_1 та ω_2 відповідно. Тоді:
$$XY \leqslant XO_1 + O_1O_2 + O_2Y = \frac{AD}{2} + \frac{AB+CD}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AB+BC+CD+AD}{2}$$
   .

4. Знайдіть усі пари натуральних чисел m і n таких, що
$$(\text{НСК}(m,n))^2 = m + n.$$

   Нехай $d = \text{НСД}(m,n)$. Тоді $m = d \cdot m_1$ та $n = d \cdot n_1$, де m_1 та n_1 взаємно прості числа. Маємо $d^2 m_1^2 n_1^2 = d \cdot (m_1 + n_1)$, що еквівалентно $m_1 \cdot (d m_1 n_1^2 - 1) = n_1$. Оскільки m_1 та n_1 взаємно прості, і права частина ділиться на m_1, то $m_1 = 1$. Аналогічно можна довести, що $n_1 = 1$. Тоді $d = 2$, а тому $m = n = 2$.

5. Скількома способами прямокутну таблицю з m рядками та n стовпчиками можна заповнити числами 0 та 1 таким чином, щоб добуток чисел у кожному рядку дорівнював 0?

   За основним правилом комбінаторики один рядок можна заповнити усього 2^n способами. Добуток чисел у цьому рядку буде не дорівнювати 0 лише в тому випадку, коли всі цифри у рядку одиниці. Тоді кількість способів поставити 0 та 1 таким чином, щоб добуток у рядку дорівнював 0 буде $2^n - 1$. Оскільки всього рядків m, то за основним правилом комбінаторики кількість способів заповнити рядки у таблиці буде дорівнювати $(2^n - 1)^m$.

10 клас

1. Велосипедист та мотоцикліст починають рухатися по кільцевій дорозі у вигляді кола радіуса 100 м одночасно і в одному напрямку. Скільки разів після цього протягом 15 хвилин вони зустрінуться, якщо мотоцикліст рухається з постійною лінійною швидкістю 50 км/год, а велосипедист — 30 км/год? *Довідка. Лінійна швидкість точки при русі по колу – це довжина дуги кола, що проходить точка за одиницю часу.*

   Нехай L – довжина кола радіуса R, u та v швидкість мотоцикліста та велосипедиста відповідно, t – час між двома послідовними зустрічами велосипедиста та мотоцикліста. Тоді справедлива рівність
   $$ut - L = vt.$$
   Тоді маємо, що $t = \dfrac{L}{u-v}$. За умовою $L = 2\pi R = 200\pi$м $= 0,2\pi$км. Тоді $t = \dfrac{0,2\pi}{50-30} = 0,01\pi$ годин.

   Кількість зустрічей N протягом 15 хвилин (0,25 години) дорівнює $N = \left[\dfrac{0,25}{0,01\pi}\right] = \left[\dfrac{25}{\pi}\right]$, де $[r]$ – найбільше ціле число, що не перевищує r.

   Застосуємо оцінку $\pi > 3,14$, тоді $8\pi > 25,12 > 25$, отже $\frac{25}{\pi} < 8$. З іншого боку $\pi < 3,15$, тоді $7\pi < 22,05 < 25$, отже $\frac{25}{\pi} > 7$. Таким чином $N = 7$.

2. Про дійсні числа x, y та z відомо, що $x + 2y - 3z = 0$. Доведіть, що $2xy - 3xz - 6yz \leqslant 0$.

   За умовою $0 = (x + 2y - 3z)^2 = x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 6xz - 12zy$, тоді
   $$2xy - 3xz - 6yz = -\frac{1}{2}(x^2 + 4y^2 + 9z^2) \leqslant 0.$$

3. В трикутнику ABC точка O є центром вписаного кола. При цьому $\angle AOC = 120°$. Навколо трикутників ABC та AOC описали кола. Знайдіть відношення радіусів цих кіл.

   Оскільки O — центр вписаного кола, то AO і CO є бісектрисами трикутника ABC. Тоді $\angle AOC = 180° - \frac{\angle BAC}{2} - \frac{\angle BCA}{2} = 120°$, звідки маємо, що $\angle BAC + \angle BCA = 120°$. Тому $\angle ABC = 60°$. Позначимо через R та r радіуси описаних кіл трикутників ABC і AOC відповідно. За теоремою синусів маємо, що $2R = \frac{AC}{\sin(\angle ABC)}$ і $2r = \frac{AC}{\sin(\angle AOC)}$. Тоді $\frac{R}{r} = \frac{\sin(\angle AOC)}{\sin(\angle ABC)} = \frac{\sin(120°)}{\sin(60°)} = 1$.

4. Довжини сторін трикутника ABC є послідовними натуральними числами. Медіана, проведена з вершини A, перпендикулярна бісектрисі, що проведена з вершини B. Знайдіть периметр трикутника.

   Нехай медіана AK і бісектриса BD трикутника ABC перетинаються в точці P. Тоді $\triangle ABK$ — рівнобедрений, оскільки в ньому бісектриса BP є також і висотою. Тому $AB = BK = \frac{BC}{2}$. Позначимо довжини сторін трикутника ABC через n, $n+1$ та $n+2$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $AB < BC$, то $AB < n + 2$ і $BC > n$.

   Якщо $AB = n$ і $BC = n + 2$, то $n + 2 = 2n$, тому $n = 2$ і сторони трикутника будуть 2, 3 та 4. Такий трикутник існує, і його периметр дорівнює 9. Крім того, в такому трикутнику медіана, проведена з вершини A, перпендикулярна бісектрисі, що проведена з вершини B.

   Якщо $AB = n$ і $BC = n + 1$, то $n + 1 = 2n$, тому $n = 1$ і сторони трикутника будуть 1, 2 та 3. Такого трикутника не існує, бо не виконується нерівність трикутника.

   Якщо $AB = n + 1$, то $BC = n + 2$, а отже $n + 2 = 2(n + 1)$. Тому $n = 0$, що неможливо.

   Отже, єдиний можливий випадок це трикутник зі сторонами 2, 3 та 4 і його периметр дорівнює 9.

5. Яку найбільшу кількість прямокутників розміру 1×4 можна вирізати з квадратного аркуша паперу в клітинку розміру 2018×2018?

   Розділимо аркуш паперу на квадратики 2×2 і зафарбуємо їх у шаховому порядку у чорний і білий кольори. Вважаємо, що лівий нижній квадрат зафарбовано у чорний колір. Тоді ми отримаємо 1009×1009 квадратів 2×2, серед яких $\frac{1009\times 1009+1}{2}$ чорних, і $\frac{1009\times 1009-1}{2}$ білих. Відмітимо, що *довільний прямокутник* 1×4*, вирізаний з так розфарбованого паперу в клітинку, буде мати по* 2 *білих і чорних клітинок. Тому всього може бути вирізано не більше ніж* $1009 \times 1009 - 1$ *прямокутників* 1×4. *Легко бачити, що* $1009 \times 1009 - 1$ *прямокутників* 1×4 *з аркуша розміром* 2018×2018 *вирізати можна. Дійсно, розріжемо аркуш на два прямокутники розмірами* 2016×2018 *і* 2×2018. *Перший прямокутник можна розрізати на прямокутники* 1×4 *повністю, а у другій смужці залишиться* 4 *нерозрізаних клітинки.*

11 клас

1. Велосипедист та мотоцикліст починають рухатися по кільцевій дорозі у вигляді кола радіуса 100 м одночасно і в одному напрямку. Скільки разів після цього протягом 15 хвилин вони зустрінуться, якщо мотоцикліст рухається з постійною лінійною швидкістю 50 км/год, а велосипедист — 30 км/год? *Довідка. Лінійна швидкість точки при русі по колу – це довжина дуги кола, що проходить точка за одиницю часу.*

   Див. розв'язання задачі 10.1.

2. Розв'яжіть рівняння

$$(x^2-4x+4)(x^2-4x+2)=\log_2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)+\log_2\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right).$$

   Відмітимо, що

$$\log_2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)+\log_2\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)=\log_2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)=\log_2\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2}\right)\leqslant\log_2\frac{1}{2}=-1.$$

   Крім того,

$$(x^2-4x+4)(x^2-4x+2)=((x-1)(x-3)+1)\cdot((x-1)(x-3)-1)=((x-1)(x-3))^2-1\geq-1.$$

   Тому $(x-1)(x-3)=0$, а отже $x=1$ або $x=3$. Безпосередньою перевіркою переконуємось, що $x=1$ є коренем рівняння, а $x=3$ — не є коренем рівняння.

3. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди має довжину b і утворює з висотою піраміди кут β. Точка O — рівновіддалена від усіх 5 вершин піраміди. Знайдіть відстань від точки O до вершин піраміди.

   Нехай S — вершина піраміди, квадрат $ABCD$ — основа піраміди, а точка H — основа висоти піраміди. Вона є точкою перетину діагоналей $ABCD$, оскільки піраміда правильна.

   Розглянемо діагональний переріз SAC. За умовою задачі це рівнобічний трикутник такий, що $SA=SC=b$. Точка H є основою висоти, проведеної з вершини S до сторони AC. Нехай O_1 — точка площини SAC, що рівновіддалена від вершин S, A і C. Тоді вона є точкою перетину серединних перпендикулярів, проведених до сторін SA, SC і AC. Оскільки трикутник SAC рівнобедрений, то SH є висотою, і медіаною. З цього слідує, що відрізок SH лежить на серединному перпендикулярі до відрізка AC. Отже точка O_1 лежить на прямій SH. За побудовою $SO_1=AO_1=CO_1$. Отже, трикутник SO_1A — рівнобедрений і $\angle O_1SA=\beta$. З цього випливає, що

$$SO_1=\frac{b}{2\cos\beta}.$$

   Аналогічно розглянемо діагональний переріз SBD і побудуємо точку O_2 площини SBD, що є рівновіддаленою від вершин S, B і D. Застосовуючи такі самі міркування, як для перерізу SAC, отримаємо, що точка O_2 лежить на прямій SH і

$$SO_2=BO_2=DO_2=\frac{b}{2\cos\beta}.$$

   Маємо, що точки O_1 і O_2 розташовані на промені SH, і лежать на однаковій відстані від точки S. Тому точки O_1 і O_2 співпадають з точкою O. Отже, $SO=AO=BO=CO=DO=\dfrac{b}{2\cos\beta}$.

4. Знайдіть усі пари натуральних чисел m і n таких, що

$$(\text{НСК}(m,n))^4+10=4m+9n.$$

   Якщо $m=1$, то $HCK(m,n)=n$ і ми отримуємо рівняння $n^4-9n+6=0$. Зрозуміло, що $n=1$ не є його коренем, а при $n>1$ маємо $n^4-9n+6\geq 4n^2-9n+6\geq 2\sqrt{24}n-9n>0$. Таким чином, якщо пара натуральних чисел (m,n) є розв'язком рівняння, то $m>1$.

Оскільки НСК$(m,n) \geqslant$ НСД(m,n), то

$$4m+9n = (\text{НСК}(m,n))^4 + 10 \geqslant (\text{НСК}(m,n)\cdot \text{НСД}(m,n))^2 + 10 = (mn)^2 + 9 + 1 \geqslant 6mn + 1.$$

Таким чином, $4m+9n \geq 6mn+1$, що еквівалентно $(2m-3)(3n-2) \leqslant 5$. Оскільки при $m > 1$ маємо $2m-3 \geq 1$, то $3n-2 \leq 5$, звідки $n \leq 2$. Аналогічно $2m-3 \leq 5$, звідки $m \leq 4$. Безпосередньою перевіркою отримаємо, що єдиною парою натуральних чисел, що задовольняють умові є $m = n = 2$.

5. Яку найбільшу кількість прямокутників розміру 1×4 можна вирізати з квадратного аркуша паперу в клітинку розміру 2018×2018?

   Див. розв'язання задачі 10.5.

Укладачі: Кірман В. К., Коваленко О. В., Козиненко О. В., Парфінович Н. В., Поляков О. В.