

Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики  
(Дніпропетровська область)  
**6 клас**

1. З двох сіл – Дмитрівки та Петрівки, одночасно назустріч один одному, вийшли Дмитро та Петро зі швидкостями 5 км/год та 7км/год відповідно. Між селами - пряма дорога довжиною 60 км, яка проходить через село Іванівка. З моменту початку руху Дмитра та Петра, з Іванівки назустріч Дмитру виїхав на мотоциклі Іван. Доїхавши до Дмитра, він розвернувся та поїхав до Петра, потім знову до Дмитра і т. д. до тих пір, поки Дмитро та Петро не зустрілися. Який шлях проїхав Іван, якщо швидкість його мотоцикла 50 км/год.

2. Тетяна Іванівна, вчителька математики у 6-Б класі, перемножила чотири різних простих числа. В результаті вона отримала трицифрове число, що закінчується нулем. Відомо, що сума цифр цього числа ділиться на 3 та те, що це число менше 211. Які прості числа перемножила Тетяна Іванівна?

3. Маленький син Тетяни Іванівни, любить читати математичні книжки. В з них він знайшов такий значок:  $m!$ . Він прочитав, що для натурального числа  $m$  цей значок означає добуток усіх натуральних чисел від 1 до  $m$ :

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m,$$

наприклад,  $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ . Син вчительки запропонував мамі задачу для математичної олімпіади, у якій треба знайти значення виразу:

$$\frac{1}{35} \cdot \left( \frac{1}{2!} \cdot \frac{3!}{4!} \cdot \frac{5!}{6!} \cdot \frac{7!}{8!} \cdot 9! \right).$$

Знайдіть і Ви це значення, шановний учасник олімпіади!

4. Оленка та Даринка грають у таку гру. Вони по черзі ставлять тури у клітинки шахівниці (розміром  $8 \times 8$ ). Починає Оленка. Якщо на якийсь горизонталі або вертикалі стоїть тура, то ставити тури на відповідні горизонталі або вертикалі заборонено. Програє той, хто не може зробити хід. Хто з гравців може грати так, щоб незалежно від ходів суперника завжди вигравати? Як тоді треба грати цьому гравцю?

5. Чи можна вирізати з паперу дві смужки у вигляді прямокутників, такі, що при одному розміщенні площа їх спільної частини була менше  $1 \text{ мм}^2$ , а при другому більше  $16 \text{ см}^2$ ?

*На виконання завдань відводиться 3 години*

*УВАГА УЧАСНИКАМ ТА ВЧИТЕЛЯМ! Розв'язання задач, а також інформацію по математичним олімпіадам області дивіться після 15-00 на сайті*

**[sites.google.com/view/math-olimp-dnipro](https://sites.google.com/view/math-olimp-dnipro)**

Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики  
(Дніпропетровська область)  
**6 клас**

1. З двох сіл – Дмитрівки та Петрівки, одночасно назустріч один одному, вийшли Дмитро та Петро зі швидкостями 5 км/год та 7км/год відповідно. Між селами - пряма дорога довжиною 60 км, яка проходить через село Іванівка. З моменту початку руху Дмитра та Петра, з Іванівки назустріч Дмитру виїхав на мотоциклі Іван. Доїхавши до Дмитра, він розвернувся та поїхав до Петра, потім знову до Дмитра і т. д. до тих пір, поки Дмитро та Петро не зустрілися. Який шлях проїхав Іван, якщо швидкість його мотоцикла 50 км/год.

2. Тетяна Іванівна, вчителька математики у 6-Б класі, перемножила чотири різних простих числа. В результаті вона отримала трицифрове число, що закінчується нулем. Відомо, що сума цифр цього числа ділиться на 3 та те, що це число менше 211. Які прості числа перемножила Тетяна Іванівна?

3. Маленький син Тетяни Іванівни, любить читати математичні книжки. В з них він знайшов такий значок:  $m!$ . Він прочитав, що для натурального числа  $m$  цей значок означає добуток усіх натуральних чисел від 1 до  $m$ :

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m,$$

наприклад,  $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ . Син вчительки запропонував мамі задачу для математичної олімпіади, у якій треба знайти значення виразу:

$$\frac{1}{35} \cdot \left( \frac{1}{2!} \cdot \frac{3!}{4!} \cdot \frac{5!}{6!} \cdot \frac{7!}{8!} \cdot 9! \right).$$

Знайдіть і Ви це значення, шановний учасник олімпіади!

4. Оленка та Даринка грають у таку гру. Вони по черзі ставлять тури у клітинки шахівниці (розміром  $8 \times 8$ ). Починає Оленка. Якщо на якийсь горизонталі або вертикалі стоїть тура, то ставити тури на відповідні горизонталі або вертикалі заборонено. Програє той, хто не може зробити хід. Хто з гравців може грати так, щоб незалежно від ходів суперника завжди вигравати? Як тоді треба грати цьому гравцю?

5. Чи можна вирізати з паперу дві смужки у вигляді прямокутників, такі, що при одному розміщенні площа їх спільної частини була менше  $1 \text{ мм}^2$ , а при другому більше  $16 \text{ см}^2$ ?

*На виконання завдань відводиться 3 години*

*УВАГА УЧАСНИКАМ ТА ВЧИТЕЛЯМ! Розв'язання задач, а також інформацію по математичним олімпіадам області дивіться після 15-00 на сайті*

**[sites.google.com/view/math-olimp-dnipro](https://sites.google.com/view/math-olimp-dnipro)**

1. Баба Дуся, що продає цибулю на ринку, у листопад підняла ціну на товар на 10%, а у грудні знову підвищила ціну на 10%. На скільки відсотків за два місяці зросли ціни на цибулю в баби Дусі?

2. Суперкомп'ютер обчислив  $17^{2017}$  та поділити результат на 8. З'ясуйте, який при цьому буде залишок (без комп'ютерів!). Відповідь обґрунтуйте.

3. Тетяна Іванівна, учителька математики у 7-А класі, запропонувала своїм учням знайти усі числа  $x$ , для яких

$$\frac{x-1}{|x-1|} + \frac{x-2}{|x-2|} + \frac{x-3}{|x-3|} + \dots + \frac{x-2017}{|x-2017|} = 0$$

Яку правильну відповідь сподівається почути Тетяна Іванівна від своїх найкращих учнів? Відповідь обґрунтуйте.

4. Оленка та Даринка грають у таку гру. Вони по черзі ставлять тури у клітинки шахівниці  $9 \times 9$ . Починає Оленка. Якщо на якийсь горизонталі або вертикалі стоїть тура, то ставити тури на відповідні горизонталі або вертикалі заборонено. Програє той, хто не може зробити хід. Хто з гравців може грати так, щоб незалежно від ходів суперника завжди вигравати? Як тоді треба грати цьому гравцю?

5. Скільки кутів може бути у фігури, що утворюється при перетині двох трикутників?

**На виконання завдань відводиться 3 години**

**УВАГА УЧАСНИКАМ ТА ВЧИТЕЛЯМ!** Розв'язання задач, а також інформацію по математичним олімпіадам області дивіться після 15-00 на сайті

[sites.google.com/view/math-olimp-dnipro](https://sites.google.com/view/math-olimp-dnipro)

1. Баба Дуся, що продає цибулю на ринку, у листопад підняла ціну на товар на 10%, а у грудні знову підвищила ціну на 10%. На скільки відсотків за два місяці зросли ціни на цибулю в баби Дусі?

2. Суперкомп'ютер обчислив  $17^{2017}$  та поділити результат на 8. З'ясуйте, який при цьому буде залишок (без комп'ютерів!). Відповідь обґрунтуйте.

3. Тетяна Іванівна, учителька математики у 7-А класі, запропонувала своїм учням знайти усі числа  $x$ , для яких

$$\frac{x-1}{|x-1|} + \frac{x-2}{|x-2|} + \frac{x-3}{|x-3|} + \dots + \frac{x-2017}{|x-2017|} = 0$$

Яку правильну відповідь сподівається почути Тетяна Іванівна від своїх найкращих учнів? Відповідь обґрунтуйте.

4. Оленка та Даринка грають у таку гру. Вони по черзі ставлять тури у клітинки шахівниці  $9 \times 9$ . Починає Оленка. Якщо на якийсь горизонталі або вертикалі стоїть тура, то ставити тури на відповідні горизонталі або вертикалі заборонено. Програє той, хто не може зробити хід. Хто з гравців може грати так, щоб незалежно від ходів суперника завжди вигравати? Як тоді треба грати цьому гравцю?

5. Скільки кутів може бути у фігури, що утворюється при перетині двох трикутників?

**На виконання завдань відводиться 3 години**

**УВАГА УЧАСНИКАМ ТА ВЧИТЕЛЯМ!** Розв'язання задач, а також інформацію по математичним олімпіадам області дивіться після 15-00 на сайті

[sites.google.com/view/math-olimp-dnipro](https://sites.google.com/view/math-olimp-dnipro)

1. Фармацевту в аптеці прийшло замовлення виготовити 100г розчину, що містить 40% корисної речовини. У фармацевта є два розчини з 30% та 70% цієї речовини. Скільки грамів кожного розчину повинен взяти фармацевт?

2. Побудуйте графік функції

$$y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} + \frac{x^2 - 25}{x + 5}$$

3. Тетяна Іванівна, учителька математики у 8-Б класі, сформулювала таке твердження: "Якщо дві сторони та медіана, що проведена до третьої сторони, одного трикутника відповідно рівні двом сторонам та медіані до третьої сторони іншого трикутника, то такі трикутники рівні". Доведіть чи спростуйте це твердження.

4. Суперкомп'ютер обчислив число  $A = 17^{2017} + 33 \cdot 17^{2018}$  та поділив результат на 8. З'ясуйте, який при цьому буде залишок (без комп'ютерів!). Відповідь обґрунтуйте.

5. Чи можна квадратну таблицю  $6 \times 6$  розрізати на прямокутники  $4 \times 1$  (в одному розрізанні дозволяються як горизонтальні, так і вертикальні прямокутники).

**На виконання завдань відводиться 4 години**

**УВАГА УЧАСНИКАМ ТА ВЧИТЕЛЯМ!** Розв'язання задач, а також інформацію по математичним олімпіадам області дивіться після 15-00 на сайті

**[sites.google.com/view/math-olimp-dnipro](https://sites.google.com/view/math-olimp-dnipro)**

1. Фармацевту в аптеці прийшло замовлення виготовити 100г розчину, що містить 40% корисної речовини. У фармацевта є два розчини з 30% та 70% цієї речовини. Скільки грамів кожного розчину повинен взяти фармацевт?

2. Побудуйте графік функції

$$y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} + \frac{x^2 - 25}{x + 5}$$

3. Тетяна Іванівна, учителька математики у 8-Б класі, сформулювала таке твердження: "Якщо дві сторони та медіана, що проведена до третьої сторони, одного трикутника відповідно рівні двом сторонам та медіані до третьої сторони іншого трикутника, то такі трикутники рівні". Доведіть чи спростуйте це твердження.

4. Суперкомп'ютер обчислив число  $A = 17^{2017} + 33 \cdot 17^{2018}$  та поділив результат на 8. З'ясуйте, який при цьому буде залишок (без комп'ютерів!). Відповідь обґрунтуйте.

5. Чи можна квадратну таблицю  $6 \times 6$  розрізати на прямокутники  $4 \times 1$  (в одному розрізанні дозволяються як горизонтальні, так і вертикальні прямокутники).

**На виконання завдань відводиться 4 години**

**УВАГА УЧАСНИКАМ ТА ВЧИТЕЛЯМ!** Розв'язання задач, а також інформацію по математичним олімпіадам області дивіться після 15-00 на сайті

**[sites.google.com/view/math-olimp-dnipro](https://sites.google.com/view/math-olimp-dnipro)**

1. Фармацевту в аптеці прийшло замовлення виготовити розчин, що містить 40% корисної речовини. У фармацевта є два розчини з 30% та 70% цієї речовини. У якому відношенні повинен брати фармацевт ці два розчини?

2. Побудуйте графік функції

$$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1} + \frac{x^3 + 1}{x + 1} + 4x.$$

3. У трапеції  $ABCD$  діагоналі  $AC$  і  $BD$  перпендикулярні бічним сторонам. На більшій основі  $AD$  побудовано прямокутний трикутник  $AFD$  так, що  $AD$  є гіпотенузою, а точки  $F$  і  $B$  розміщено по різні боки від прямої  $AD$ . Доведіть, що точка перетину серединних перпендикулярів до  $AC$  і  $FD$  лежить на прямій, що містить бісектрису одного з кутів, утвореного діагоналями трапеції.

4. Суперкомп'ютер обчислив число  $A = 15^{2017} + 33 \cdot 15^{2018} + 55 \cdot 15^{2019}$  та поділив результат на 8. З'ясуйте, який при цьому буде залишок (без комп'ютерів!). Відповідь обґрунтуйте.

5. Для яких натуральних  $n$  таблицю  $n \times n$  можна розрізати на прямокутники  $4 \times 1$  (в одному розрізанні дозволяються як горизонтальні, так і вертикальні прямокутники)?

**На виконання завдань відводиться 4 години**

**УВАГА УЧАСНИКАМ ТА ВЧИТЕЛЯМ!** Розв'язання задач, а також інформацію по математичним олімпіадам області дивіться після 15-00 на сайті

[sites.google.com/view/math-olimp-dnipro](https://sites.google.com/view/math-olimp-dnipro)

1. Фармацевту в аптеці прийшло замовлення виготовити розчин, що містить 40% корисної речовини. У фармацевта є два розчини з 30% та 70% цієї речовини. У якому відношенні повинен брати фармацевт ці два розчини?

2. Побудуйте графік функції

$$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1} + \frac{x^3 + 1}{x + 1} + 4x.$$

3. У трапеції  $ABCD$  діагоналі  $AC$  і  $BD$  перпендикулярні бічним сторонам. На більшій основі  $AD$  побудовано прямокутний трикутник  $AFD$  так, що  $AD$  є гіпотенузою, а точки  $F$  і  $B$  розміщено по різні боки від прямої  $AD$ . Доведіть, що точка перетину серединних перпендикулярів до  $AC$  і  $FD$  лежить на прямій, що містить бісектрису одного з кутів, утвореного діагоналями трапеції.

4. Суперкомп'ютер обчислив число  $A = 15^{2017} + 33 \cdot 15^{2018} + 55 \cdot 15^{2019}$  та поділив результат на 8. З'ясуйте, який при цьому буде залишок (без комп'ютерів!). Відповідь обґрунтуйте.

5. Для яких натуральних  $n$  таблицю  $n \times n$  можна розрізати на прямокутники  $4 \times 1$  (в одному розрізанні дозволяються як горизонтальні, так і вертикальні прямокутники)?

**На виконання завдань відводиться 4 години**

**УВАГА УЧАСНИКАМ ТА ВЧИТЕЛЯМ!** Розв'язання задач, а також інформацію по математичним олімпіадам області дивіться після 15-00 на сайті

[sites.google.com/view/math-olimp-dnipro](https://sites.google.com/view/math-olimp-dnipro)

1. Для яких значень параметра  $a$  рівняння

$$ax = \sqrt{x-9}$$

має один корінь?

2. На дошці записано вираз  $\frac{ac}{b+c}$ . Наталка та Левко по черзі замість

букв записують натуральні числа. Спочатку Наталка пише число замість букви  $a$ , потім Левко пише число замість букви  $b$ , потім Наталка записує число замість букви  $c$ . Якщо після цього на дошці ціле число, то виграє Наталка. Чи може Наталка грати так, щоб завжди вигравати?

3. Суперкомп'ютер обчислив число

$$A = 15^{2017} + 15^{2018} + 15^{2019} + 15^{2020} + \dots + 15^{2100}$$

та поділив результат на 8. З'ясуйте, який при цьому буде залишок (без комп'ютерів!). Відповідь обґрунтуйте.

4. Трикутник  $ABC$  зі стороною  $AB=3\text{см}$  та кутом  $C$ , що дорівнює  $60^\circ$ , вписано в коло. Точки  $A$  і  $B$  фіксують на колі, а точку  $C$  рухають по дузі  $AB$ . При цьому точка перетину бісектрис рухається по деякій лінії. Обчисліть довжину цієї лінії.

5. Для яких натуральних  $m$  та  $n$  таблицю  $m \times n$  можна розрізати на прямокутники  $4 \times 1$  (в одному розрізанні дозволяються як горизонтальні, так і вертикальні прямокутники)?

**На виконання завдань відводиться 4 години**

**УВАГА УЧАСНИКАМ ТА ВЧИТЕЛЯМ!** Розв'язання задач, а також інформацію по математичним олімпіадам області дивіться після 15-00 на сайті

[sites.google.com/view/math-olimp-dnipro](https://sites.google.com/view/math-olimp-dnipro)

1. Для яких значень параметра  $a$  рівняння

$$ax = \sqrt{x-9}$$

має один корінь?

2. На дошці записано вираз  $\frac{ac}{b+c}$ . Наталка та Левко по черзі замість

букв записують натуральні числа. Спочатку Наталка пише число замість букви  $a$ , потім Левко пише число замість букви  $b$ , потім Наталка записує число замість букви  $c$ . Якщо після цього на дошці ціле число, то виграє Наталка. Чи може Наталка грати так, щоб завжди вигравати?

3. Суперкомп'ютер обчислив число

$$A = 15^{2017} + 15^{2018} + 15^{2019} + 15^{2020} + \dots + 15^{2100}$$

та поділив результат на 8. З'ясуйте, який при цьому буде залишок (без комп'ютерів!). Відповідь обґрунтуйте.

4. Трикутник  $ABC$  зі стороною  $AB=3\text{см}$  та кутом  $C$ , що дорівнює  $60^\circ$ , вписано в коло. Точки  $A$  і  $B$  фіксують на колі, а точку  $C$  рухають по дузі  $AB$ . При цьому точка перетину бісектрис рухається по деякій лінії. Обчисліть довжину цієї лінії.

5. Для яких натуральних  $m$  та  $n$  таблицю  $m \times n$  можна розрізати на прямокутники  $4 \times 1$  (в одному розрізанні дозволяються як горизонтальні, так і вертикальні прямокутники)?

**На виконання завдань відводиться 4 години**

**УВАГА УЧАСНИКАМ ТА ВЧИТЕЛЯМ!** Розв'язання задач, а також інформацію по математичним олімпіадам області дивіться після 15-00 на сайті

[sites.google.com/view/math-olimp-dnipro](https://sites.google.com/view/math-olimp-dnipro)

1. Для яких значень параметра  $b$  рівняння

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = b$$

має розв'язки?

2. З точок  $A$  і  $B$ , які лежать у різних гранях деякого двогранного кута проведено до його ребер перпендикуляри  $AC$  і  $BD$  задовжки 5 см та 8 см відповідно. Знайдіть величину двогранного кута, якщо  $CB=24$  см,  $AB=25$  см.

3. Суперкомп'ютер обчислив число

$$A = 13^{2017} + 13^{2018} + 13^{2019}$$

та поділив результат на 8. З'ясуйте, який при цьому буде залишок (без комп'ютерів!). Відповідь обґрунтуйте.

4. Трикутник  $ABC$  зі стороною  $AB=3$  см та кутом  $C$ , що дорівнює  $60^\circ$ , вписано в коло. Точки  $A$  і  $B$  фіксують на колі, а точку  $C$  рухають по дузі  $AB$ . При цьому точка перетину бісектрис рухається по деякій лінії. Обчисліть довжину цієї лінії.

5. Для яких натуральних  $m$  та  $n$  таблицю  $m \times n$  можна розрізати на прямокутники  $4 \times 1$  (в одному розрізанні дозволяються як горизонтальні, так і вертикальні прямокутники)?

**На виконання завдань відводиться 4 години**

**УВАГА УЧАСНИКАМ ТА ВЧИТЕЛЯМ!** Розв'язання задач, а також інформацію по математичним олімпіадам області дивіться після 15-00 на сайті

[sites.google.com/view/math-olimp-dnipro](https://sites.google.com/view/math-olimp-dnipro)

1. Для яких значень параметра  $b$  рівняння

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = b$$

має розв'язки?

2. З точок  $A$  і  $B$ , які лежать у різних гранях деякого двогранного кута проведено до його ребер перпендикуляри  $AC$  і  $BD$  задовжки 5 см та 8 см відповідно. Знайдіть величину двогранного кута, якщо  $CB=24$  см,  $AB=25$  см.

3. Суперкомп'ютер обчислив число

$$A = 13^{2017} + 13^{2018} + 13^{2019}$$

та поділив результат на 8. З'ясуйте, який при цьому буде залишок (без комп'ютерів!). Відповідь обґрунтуйте.

4. Трикутник  $ABC$  зі стороною  $AB=3$  см та кутом  $C$ , що дорівнює  $60^\circ$ , вписано в коло. Точки  $A$  і  $B$  фіксують на колі, а точку  $C$  рухають по дузі  $AB$ . При цьому точка перетину бісектрис рухається по деякій лінії. Обчисліть довжину цієї лінії.

5. Для яких натуральних  $m$  та  $n$  таблицю  $m \times n$  можна розрізати на прямокутники  $4 \times 1$  (в одному розрізанні дозволяються як горизонтальні, так і вертикальні прямокутники)?

**На виконання завдань відводиться 4 години**

**УВАГА УЧАСНИКАМ ТА ВЧИТЕЛЯМ!** Розв'язання задач, а також інформацію по математичним олімпіадам області дивіться після 15-00 на сайті

[sites.google.com/view/math-olimp-dnipro](https://sites.google.com/view/math-olimp-dnipro)