Розв'язання задач

6 клас

1. За третій день туристи пройшли $1-\frac{4}{15}-\frac{2}{15}=\frac{9}{15}$ частину шляху, що складає 36 кілометрів.

2. Оскільки для довільних натуральних x та y $HCK(x,y)\cdot HCD(x,y)=xy$, то за умовою задачі числа x та y є взаємно простими. Тому умові задовольняють тільки такі пари натуральних чисел: $(1,15)$, $(3,13)$, $(5,11)$, $(7,9)$, $(9,7)$, $(11,5)$, $(13,3)$, $(15,1)$ — всього 8 пар.

3.

$$1024\cdot\left(\frac{3\cdot 33\cdot 333\cdot 3333\cdot 33333\cdot 333333}{6\cdot 66\cdot 666\cdot 6666\cdot 66666\cdot 666666}\right)=$$

$$=1024\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{33}{66}\cdot\frac{333}{666}\cdot\frac{3333}{6666}\cdot\frac{33333}{66666}\cdot\frac{333333}{666666}=1024\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=16.$$

4. Перебором встановлюємо, що дві (з чотирьох) сині точки можна вибрати 6-ма способами. Крім того, зелену точку можна вибрати 20-ма способами. Зауважимо, що оскільки прямі, на яких розташовані сині та зелені точки паралельні, то з довільної пари синіх точок і однієї зеленої точки ми отримуємо рівно один трикутник. Тому кількість способів вибрати зелену точку не залежить від того, як були вибрані дві сині точки. За правилом множення отримуємо, що існує $6\cdot 20=120$ трикутників з двома синіми і однією зеленою вершинами.

5. Зауважимо, що кількості цифр 9, що зустрічається при нумерації сторінок $1-100$; сторінок $101-200$ та сторінок $201-300$ є рівними.

Порахуємо кількість цифр 9, що зустрічається при нумерації сторінок $1-100$. Цифра 9 зустрічається по одному разу в номерах $9+10k$ $k=0,1,\ldots,8$, $90-98$ і два рази в номері 99, тобто $9+9+2=20$ разів.

Тому всього при нумерації книги було використано 60 цифр 9.

7 клас.

1. Нехай x та y – швидкість заповнення басейну першою та трубою. Другою – 1/6. Тоді за умовою отримаємо таке рівняння:

$3x + \frac{3}{6} = \frac{4}{5}$.

Тоді $x = \frac{1}{10}$.

Щоб знайти час за який перша труба наповнить басейн нам потрібно знайти величину $\frac{1}{x}$:

$$x = \frac{1}{10} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = 10.$$

Відповідь: за 10 годин.

2. Число 39 має серед дільникиків: 1; 3; 13; 39. Серед шуканих чисел не може бути числа 39, оскільки додаючи до нього додатні доданки ми отримаємо число більше за 39. Отже, серед шуканих чисел будуть числа 1, 3 та 13. Число 39 ми отримаємо якщо перемножимо 3 на 13. Але оскільки сума теж повинна дорівнювати 39, то ми отримаємо що всі інші числа повинні дорівнювати 1. Всього одиниць буде 39-3-13=23.

Відповідь: Отже, шуканими числами є двадцять три числа 1, одне число 3 та одне число 13.

3. Три прямі можуть розташовуватись на площині таким чином:

1) всі три бути паралельними;
2) дві бути паралельними, а третя їх перетинає;
3) перетинатись в одній точці;
4) всі три перетинаються в різних точках.

У першому випадку не утворюється ніяких кутів. У другому – утворюється 8 кутів. У третьому – утворюється 12 кутів. В четвертому – також 12 кутів.

Відповідь: може не утворитись ніяких кутів, утворитись 8 кутів, або утворитись 12 кутів.

4. . Як відомо $НСК(x, y)НСД(x, y) = xy$, тому система матиме вигляд :

$$\begin{cases} xy = 90 \\ x + y = 21 \end{cases}$$

Отже, потрібно знайти пару натуральних дільників числа 90, які в сумі дають 21. Парами дільників числа 90, які в добутку дають 90 є такі числа: 1 і 90; 2 і 45; 3 і 30; 5 і 18; 6 і 15; 9 і 10. Єдина пара яка в сумі дає 21 є пара 6 і 15.

Відповідь: одне з чисел дорівнює 6, а друге – 15.

Зауваження. Учні 7 класу розв'язують це завдання без використання поняття «Система рівнянь»

5. Припустимо, що таке може статися. Усіх учнів цього класу ми можемо розглядати як вершини графу. Тоді ребрами цього графу будуть відповідно дружні стосунки між учнями. В даному графі ми отримаємо, що 9 вершин мають степінь 5, 11 вершин мають степінь 6, і 10 вершин мають степінь 3. Отримали що в даному графі є 19 вершин непарної степені. Але кількість вершин непарної степені повинна бути парної. Прийшли до суперечності, тому цього не може бути.

Відповідь: ні, не може.

Зауваження. Учні 7 класу розв'язують це завдання без використання понять теорії графів, але тоді відповідні твердження повинні доводитись (див, наприклад, «Ленинградские математические кружки»).

8 клас

1. Нехай в першому ящику було x яблук, а у другому y яблук. За умовою $x-45=y+45$ та $x+20=3(y-20)$. Розв'язуючи отриману систему отримаємо $x=175$, $y=85$.

2.

$$\frac{3a+5b}{7a+9b}=\frac{3\frac{a}{b}+5}{7\frac{a}{b}+9}=\frac{3\frac{c}{d}+5}{7\frac{c}{d}+9}=\frac{3c+5d}{7c+9d}.$$

3. На промені A_1B_1 відкладемо точку B так, щоб $A_1B=A_2B_2$. Тоді трикутники $A_2B_2C_2$ та A_1BC_1 рівні за першою ознакою рівності трикутників. З рівності трикутників $A_2B_2C_2$ і A_1BC_1 та умови слідує, що висоти трикутників

$A_1B_1C_1$ та A_1BC_1, що проведені з вершин B_1 та B відповідно, рівні. З цього слідує, що точка B_1 співпадає з точкою B, а отже трикутники $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ рівні.

4.

$$\frac{3n-1}{n+2}=\frac{3n+6-7}{n+2}=3-\frac{7}{n+2}.$$

Для того, щоб дріб $\frac{3n-1}{n+2}$ був натуральним числом потрібно, щоб $\frac{7}{n+2}$ було цілим числом меншим за 3. Оскільки число 7 — просте, то $\frac{7}{n+2}$ буде цілим тільки при $n+2=\pm 1$ або $n+2=\pm 7$. Крім того, $\frac{7}{-1+2}=7>2$, отже нам підходять тільки $n=-3$, $n=5$, $n=-9$.

5. Розіб'ємо таблицю $2016*2016$ на $1008 \cdot 1008$ табличок розміру $2*2$. За умовою в таблиці пофарбовано більше $1008 \cdot 1008$ клітинок. Тому хоча б в одній з $1008 \cdot 1008$ табличок розміру $2*2$ буду пофарбовано хоча б 2 клітинки. Ці клітинки будуть сусідніми.

9 клас.

1. Оскільки літаки летять по перпендикулярних маршрутах, то можна вважати що літаки рухаються по катетах прямокутного трикутника. Тоді відстань між літаками відповідно буде гіпотенуза цього трикутника. Нехай швидкість першого літака x, тоді швидкість другого – $0{,}75\ x$. Тоді за 2 години перший літак пролетів $2\ x$, а другий – $2 \cdot 0{,}75\,x = 1{,}5x$. Тоді за теоремою Піфагора відстань між ними дорівнює $\sqrt{(2x)^2+(1{,}5x)^2} = 2000$.

$$\sqrt{6{,}25x^2} = 2000;$$

$$2{,}5\ x = 2000;$$

$$x = 800;$$

$$0{,}75\ x = 600.$$

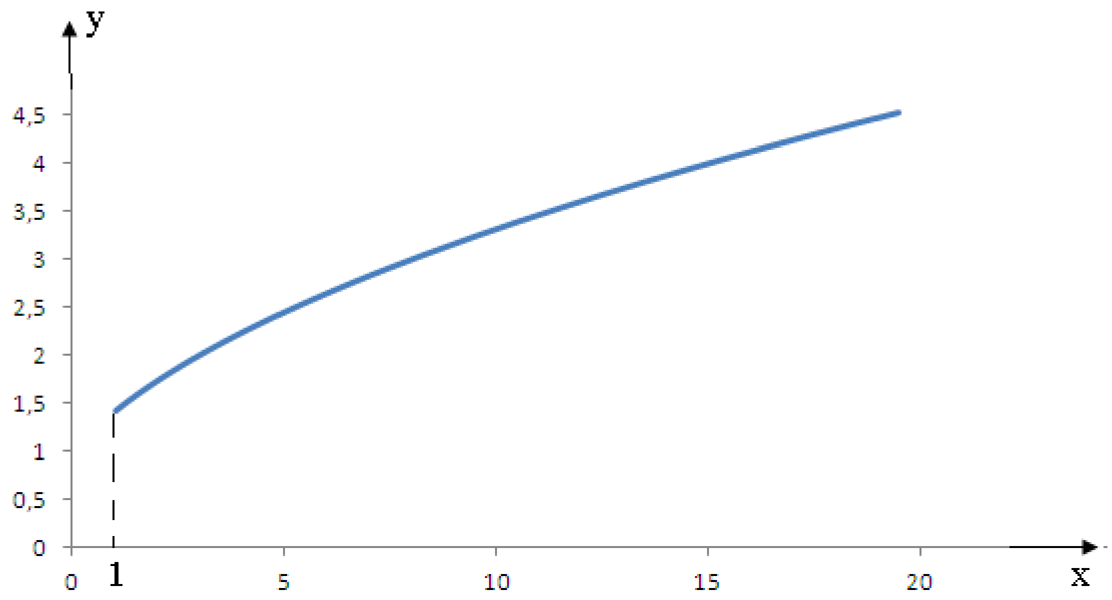
Відповідь: Швидкість першого літака 800 км/год, а другого – 600 км/год.

2. Область визначення функції: $x \geq 1$.

$$\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x-1+2\sqrt{(x-1)(x+1)}+x+1}-\sqrt{x-1}=$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)^2} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x+1}$$

Отже, $y = \sqrt{x+1}$, і враховуючи область визначення функції, графік матиме вид:



3. Оскільки основа висоти ділить сторону у відношенні 5:9, то можна вважати що відповідні відрізки дорівнюють $5x$ і $9x$. Тоді сторона дорівнює $14x$. А серединний перпендикуляр ділить сторону на відрізки $7x$ і $7x$. Отже основа серединного перпендикуляра знаходиться на більшому відрізку, і ділить його у відношенні $7x$ і $9x - 7x = 2x$, тобто 7:2. Оскільки серединний перпендикуляр і висота паралельні, то за теоремою Фалеса таке саме відношення 7:2 буде утворювати точка перетину серединного перпендикуляра з бічною стороною (рахуючи від вершини основи).

Відповідь: 7:2.

4. $$y^2 - 1 - 2xy - 2x = 5;$$

$$(y-1)(y+1) - 2x(y+1) = 5;$$

$$(y+1)(y-2x-1) = 5;$$

Отже, отримаємо 4 випадки: один з множників дорівнює 1, а другий 5; або один дорівнює (-1), а другий (-5).

$$\begin{cases} y+1=5 \\ y-2x-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y+1=1 \\ y-2x-1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y+1=-5 \\ y-2x-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-6 \\ x=-3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y+1=-1 \\ y-2x-1=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=1 \end{cases};$$

Відповідь: пари (1;4), (-3;0), (-3;-6), (1;-2).

5. Пофарбуємо площину у 4 кольори таким чином:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{matrix}$$

Як ми бачимо, клітинки одного кольору не мають спільних точок. За принципом Діріхле знайдеться колір що містить принаймні 2016/4=504 клітинки, які і будуть шуканими.

10 клас

1. За теоремою Вієта $x_1+x_2=4$. Крім того, за умовою $2x_1+3x_2=5$. Розв'язуючи цю систему відносно x_1 та x_2 отримаємо $x_1=7$, $x_2=-3$. За теоремою Вієта $b=x_1x_2=-21$.

2.Припустимо, що існує функція f, що задовольняє умові задачі. Підставимо $y=0$. Отримаємо, що для всіх дійсних x справедлива рівність $x^2=xf(x)$, тобто для всіх ненульових x $f(x)=x$. Підставимо $x=1$ та $y=1$. Отримаємо (враховуючи, що $1+1\neq 0$) $(1+1\cdot 2)^2=1\cdot 1+1$, що неможливо.

3. Нехай даною точкою хорда поділяється на відрізки довжиною x і y. За властивістю відрізків хорд, добуток довжин цих відрізків є сталою величиною.

Також за нерівністю Коші: $x+y\geq 2\sqrt{xy}$. Тобто довжина хорди завжди не менша деякої константи. Тому найменша хорда буде коли $x=y$.

Тоді відмічена точка є серединою хорди, а також є основою висоти опущеної з центра кола. За теоремою Піфагора знаходимо довжину хорди:

$$x + y = 2x = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

У випадку, коли $d = 0$ хорда стає діаметром і її довжина $AB = 2r = 2\sqrt{r^2 - d^2}$. *Відповідь*: $2\sqrt{r^2 - d^2}$

4. $17x + 19y = 23x + 23y - 6x - 4y = 23(x + y) - 2(3x + 2y)$. Зменшуване ділиться на 23, і від'ємник ділиться на 23 за умовою, отже різниця ділиться на 23.

5. Виділимо на площині квадратики 2*2 і пофарбуємо всі клітинки площини у 4 кольори наступним чином: у кожному з квадратиків 2*2 пофарбуємо ліву верхню, праву верхню, ліву нижню та праву нижню клітинки у перший, другий, третій та четвертий кольори відповідно. Тоді клітинки площини, що пофарбовані в один колір, не мають спільних точок. Оскільки поставлено 2015 фішок, то існує такий колір, що на клітинах, пофарбованих в цей колір, стоять принаймні 504 фішки. Клітинки, на яких стоять ці фішки будуть шуканими.

11 клас.

1.Очевидно що виконуються такі умови: $cosx - sinx \geq 0$. За цих умов дане рівняння рівносильне такому:

$$-(cosx - sinx)(cosx + sinx) = cosx - sinx$$

У свою чергу останнє рівносильне сукупності :

$$cosx - sinx = 0$$

$$cosx + sinx = -1$$

Перше рівняння дає розв'язки

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,$

для яких, очевидно, $cosx - sinx \geq 0$.

Друге рівняння методом допоміжного кута зводиться до рівняння

$$cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Маємо для нього дві серії розв'язків:

$$x=\pi+2\pi k$$

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi l$$

Розв'язки першої серії, очевидно, не задовольняють нерівності : $cosx-sinx\geq 0$, а другої задовольняють.

Маємо відповідь $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi l$, або $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ при всіх цілих l та k.

2. Проекція точки O на площину трикутника буде точка O_1 – центр описаного кола, оскільки O рівновіддалена від вершин. Але в правильному трикутнику це буде також центр вписаного кола. Відстань від вершини A до точки O_1 дорівнює:

$$AO_1=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}AB\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

За теоремою Піфагора:

$$OO_1=\sqrt{OA^2-O_1A^2}=\sqrt{100-\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{296}{3}}$$

Відповідь: $OO_1=\sqrt{\frac{296}{3}}$

3. Нехай даною точкою хорда поділяється на відрізки довжиною x і y. За властивістю відрізків хорд, добуток довжин цих відрізків є сталою величиною.

Також за нерівністю Коші: $x+y\geq 2\sqrt{xy}$. Тобто довжина хорди завжди не менша деякої константи. Тому найменша хорда буде коли $x=y$.

Тоді відмічена точка є серединою хорди, а також є основою висоти опущеної з центра кола. За теоремою Піфагора знаходимо довжину хорди:

$$x+y=2x=2\sqrt{r^2-d^2}$$

Відповідь: $2\sqrt{r^2-d^2}$

4.. $17x + 19y = 23x + 23y - 6x - 4y = 23(x + y) - 2(3x + 2y)$. Зменшуване ділиться на 23, і від'ємник ділиться на 23 за умовою, отже різниця ділиться на 23.

5. Так. Нехай вершина однієї пірамідки *F*, а другої – *G*. Квадратик між ними – *ABCD*. Тоді можливий такий маршрут: *FAGDFBGCF*

Вважаємо вершини куба вершинами графа, а його ребра, як ребра графа. Нам потрібно дізнатися чи існує Ейлерів цикл або Ейлерів ланцюг у графі. Ейлерів цикл існує, якщо в графі є 0 або 2 вершини непарної степені. Але в куба 8 вершин і всі вони степені 3, тому Ейлерового циклу в ньому не буде. Отже, комаха не зможе так проповзти по кубу.

Зауваження. Учні 11 класу можуть розв'язувати це завдання без використання понять теорії графів, але тоді відповідні твердження повинні доводитись (див, наприклад, «Ленинградские математические кружки»).